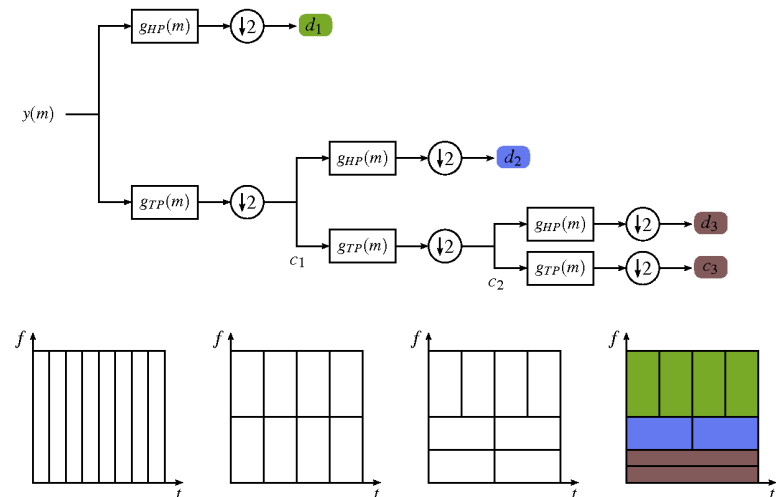


# 4. Übung Methoden der Signalverarbeitung

Wintersemester 2014/2015

Institut für Industrielle Informationstechnik

## Wavelet-Transformation

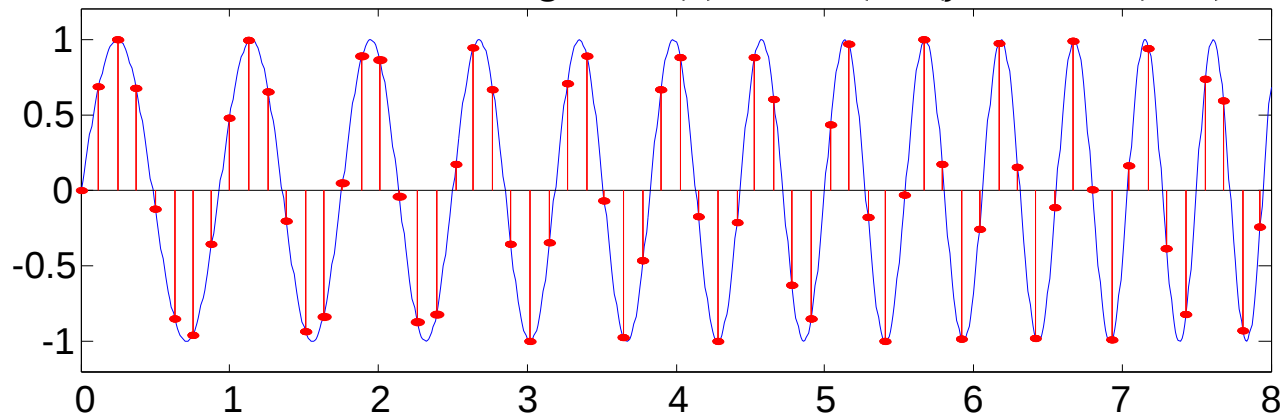


# Wavelet-Transformation

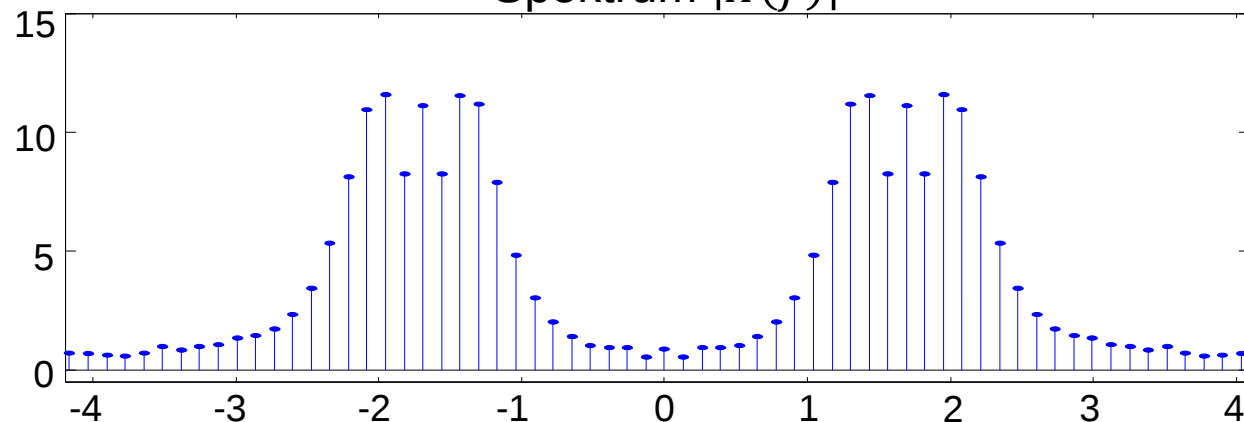
1. Kontinuierliche Wavelet-Transformation
2. Diskrete Wavelet-Transformation

## ■ Fourier-Transformation

Zeitvariantes Signal  $x(t) = \sin(2\pi(f + 0,08t) \cdot t)$



Spektrum  $|X(f)|^2$



## ■ Kurzzeit-Fourier-Transformation

- Vergleich des Signals mit einem zeit- und frequenzverschobenen Fenster:

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \langle x(t), \gamma(t - \tau) \cdot e^{j2\pi f t} \rangle$$

## ■ Wavelet-Transformation

- Vergleich des Signals mit einem zeitverschobenen und **skalierten** Mother-Wavelet:

$$W_x^\psi(a, b) = \left\langle x(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t - b}{a}\right) \right\rangle$$

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t - b}{a}\right)$$

## ■ Zeitverschobenes und skaliertes Mother-Wavelet:

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$$

## ■ Konzentration der Signalenergie:

- mittlere Zeit:  $t_{\psi_{a,b}} = at_{\psi} + b = \tau$
- mittlere Frequenz:  $f_{\psi_{a,b}} = f_{\psi}/a = f$
- Zeitdauer:  $\Delta_{t_{a,b}} = a \cdot \Delta_t$
- Bandbreite:  $\Delta_{f_{a,b}} = \Delta_f/a$

## ■ Zeit-Frequenz-Darstellung der Wavelet Transformation:

$$W_x^{\psi}(\tau, f) = \left\langle x(t), \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \cdot \psi \left( \frac{f}{f_{\psi}}(t - \tau) + t_{\psi} \right) \right\rangle$$

## ■ Zulässigkeitsbedingung

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < \infty \qquad C_{\psi\tilde{\psi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi^*(f)\tilde{\Psi}(f)}{|f|} df < \infty$$

## ■ Energieerhaltung

$$\langle x(t), y(t) \rangle_t = \left\langle W_x^\psi(a,b), W_y^\psi(a,b) \right\rangle$$

## ■ Signalrekonstruktion

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \cdot \tilde{\psi}_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

## Eigenschaften

### ■ Translationsinvarianz

$$x_s(t) = x(t - t_s) \quad \circ \text{---} \bullet \quad W_{x_s}^\psi(a, b) = W_x^\psi(a, b - t_s)$$

### ■ Affininvarianz

$$x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} x\left(\frac{t}{s}\right) \quad \circ \text{---} \bullet \quad W_{x_s}^\psi(a, b) = W_x^\psi\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

## Dyadische Wavelet Reihen

- Diskretisierung der Skalierung und Zeitverschiebung

$$a_k = 2^k \qquad b_{m,k} = m \cdot 2^k \cdot T$$

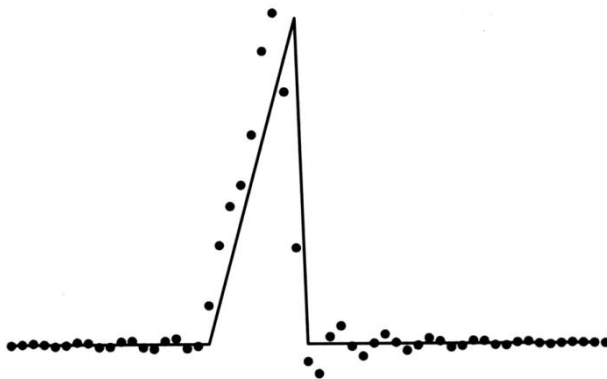
- skaliertes und zeitverschobenes Wavelet

$$\psi_{m,k}(t) = 2^{-k/2} \psi(2^{-k}(t - m2^k T)) = 2^{-k/2} \psi(2^{-k}t - mT)$$

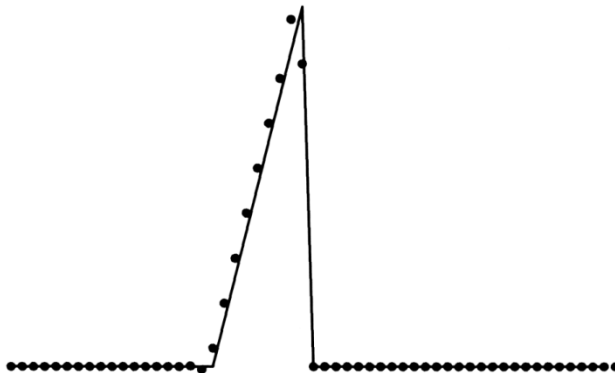
- Rekonstruktion: Wavelet-Reihe (hier:  $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$ )

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_x^\psi(m,k) \psi_{m,k}(t)$$

- Bei Signalen mit Sprüngen/Peaks bessere Approximation als Fourier-Reihe mit gleicher Anzahl an Koeffizienten

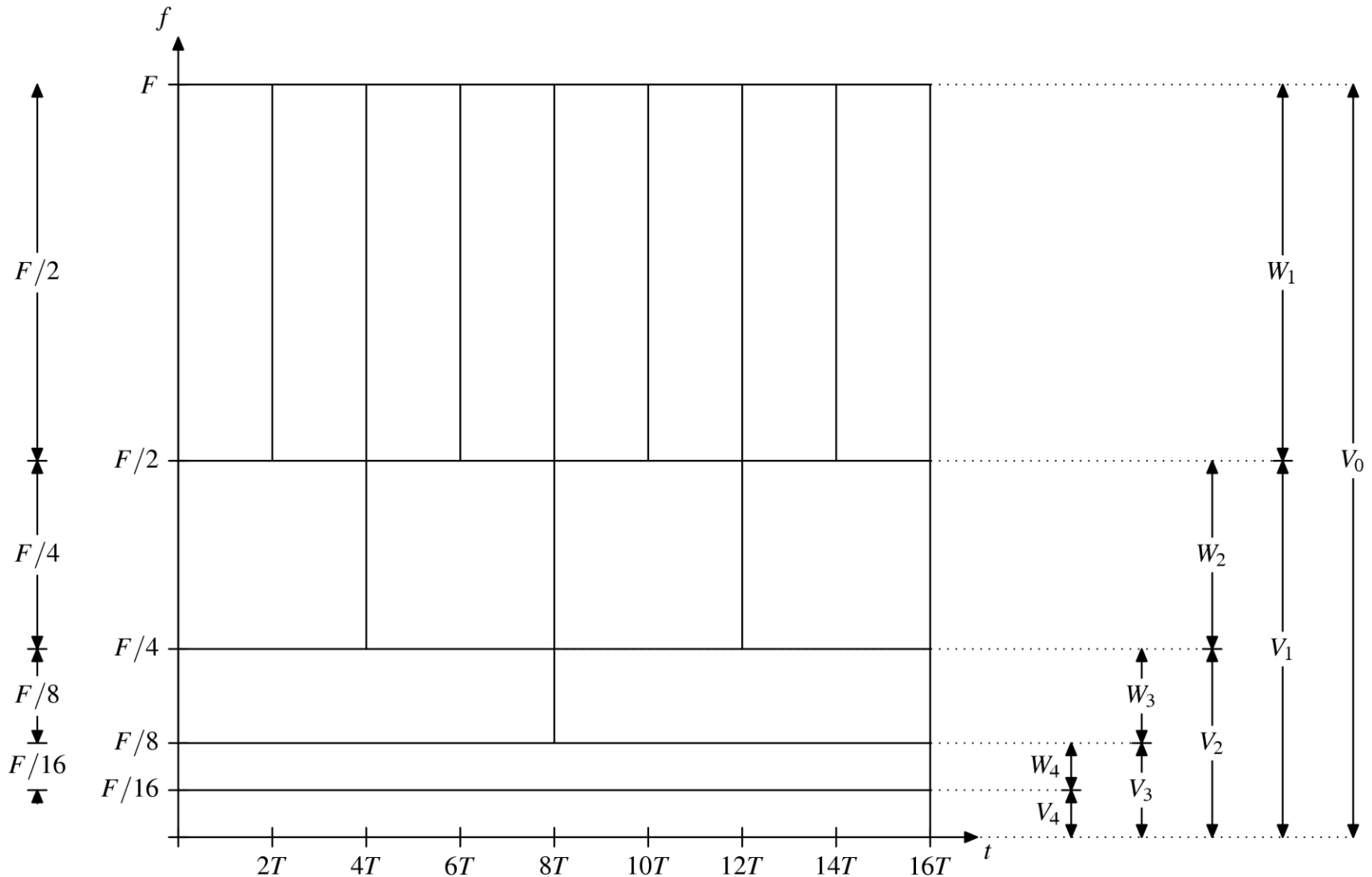


Fourier-Reihe  
(55 Punkte)



Wavelet-Reihe  
(55 Punkte)

# Diskrete Wavelet-Transformation



## Multiraten-Filterbank

- Projektion auf Bandpass-Unterräume  $W_k$

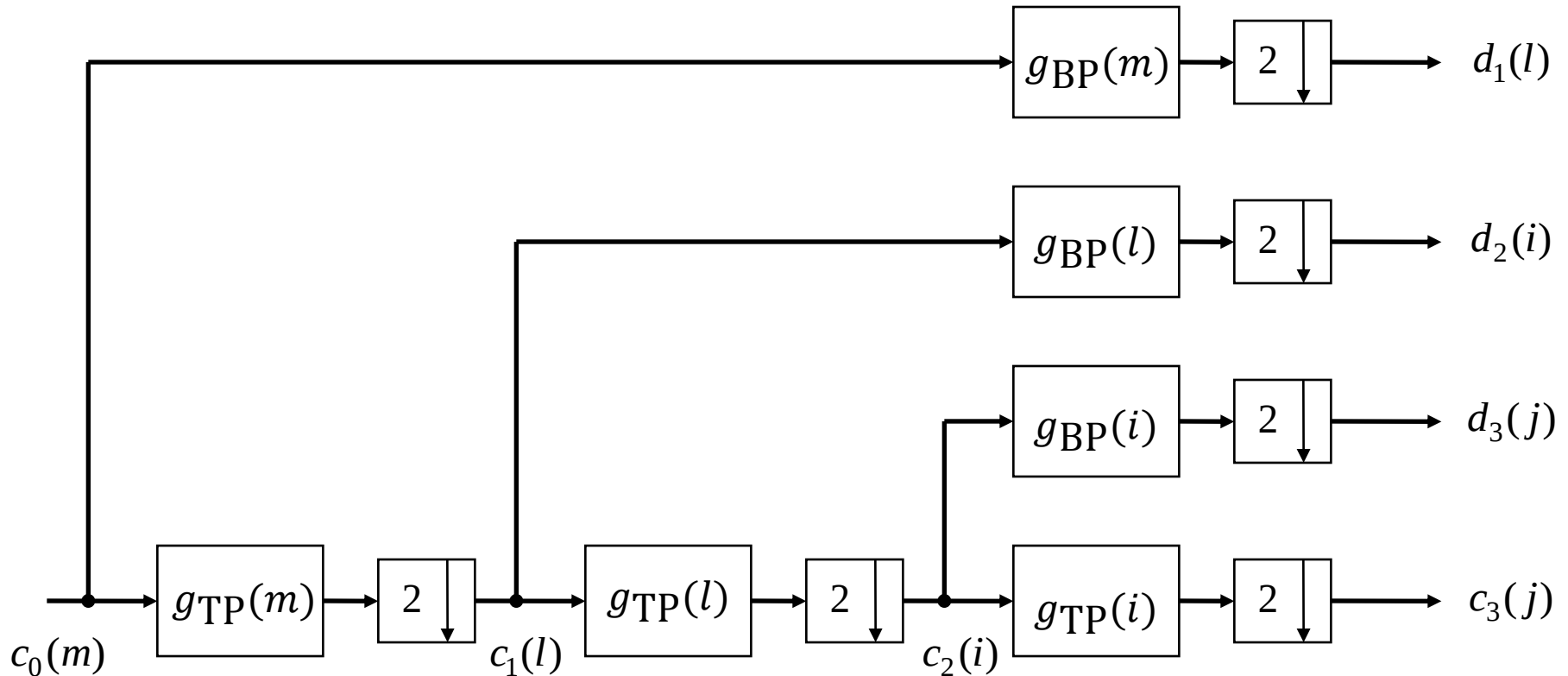
$$y_k(t) = \text{Proj}_{W_k} \{x(t)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_k(m) \psi_{m,k}(t) \in W_k$$

- Approximation des Signals  $x(t)$  im Funktionenraum  $V_0$

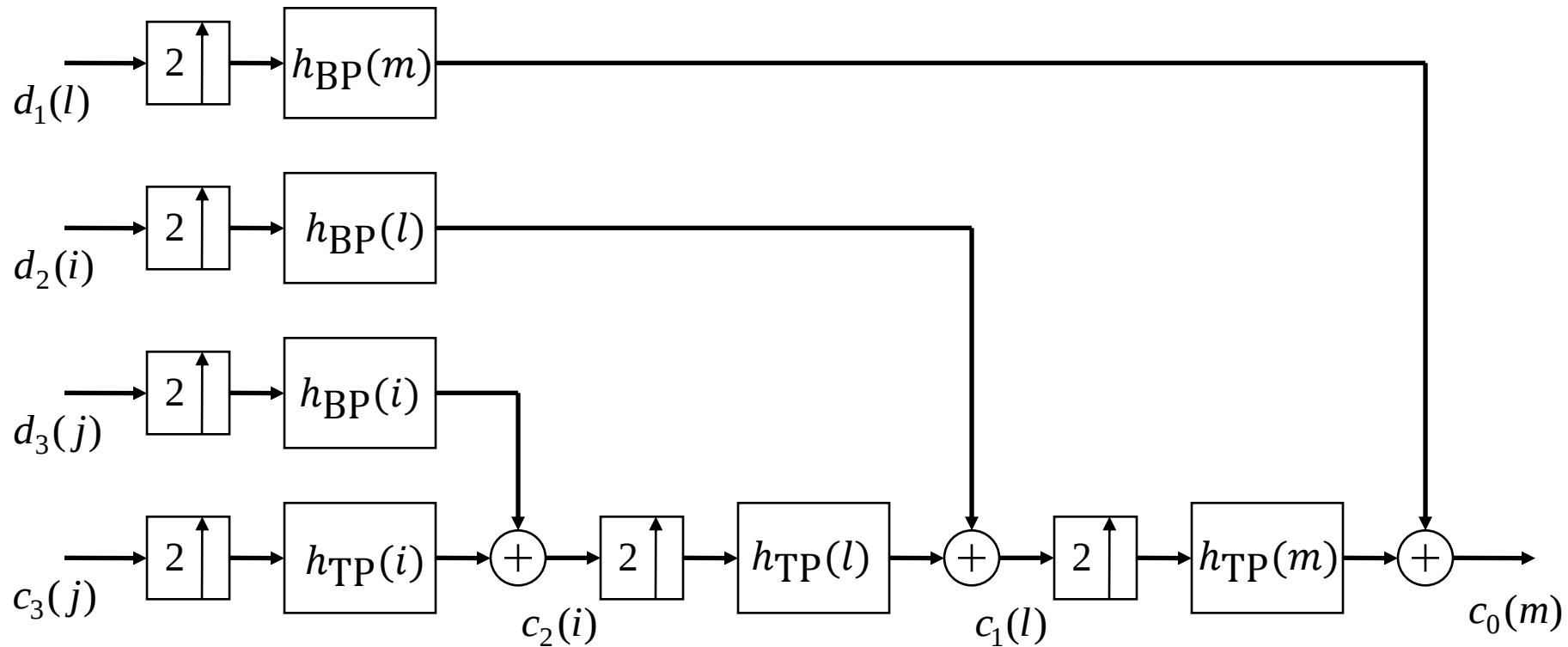
$$\begin{aligned} \hat{x}(t) \approx x_0(t) &= \text{Proj}_{V_0} \{x(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_k(m) \psi_{m,k}(t) \in V_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \end{aligned}$$

$$\text{mit } d_k(m) = W_x^\psi(m, k)$$

## Signalanalyse



## Signalsynthese



## Zusammenhang zwischen den Filtern

- Aus den Koeffizienten eines einzigen Filters lassen sich
  - die anderen Filterkoeffizienten
  - die Skalierungsfunktionen und Wavelets bestimmen.

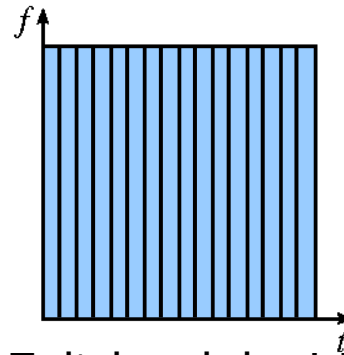
$$\begin{aligned}h_{\text{TP}}(m) &= g_{\text{TP}}^*(-m) & h_{\text{BP}}(m) &= (-1)^m \cdot h_{\text{TP}}^*(1 - m) \\h_{\text{BP}}(m) &= g_{\text{BP}}^*(-m) & g_{\text{BP}}(m) &= (-1)^m \cdot g_{\text{TP}}^*(1 - m)\end{aligned}$$

## Wavelet Packets

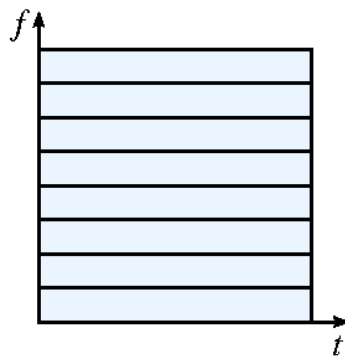
- Filterbank wird zu vollständigem Binärbaum erweitert
- Beste Basis wird ausgewählt, die Signal mit wenigen Koeffizienten hoher Energie beschreibt

# Diskrete Wavelet-Transformation

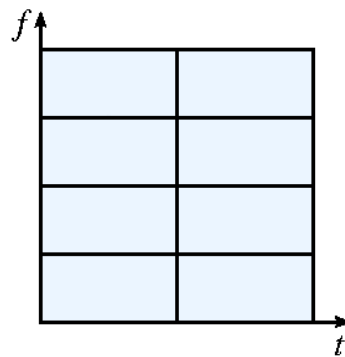
Zeitsignal



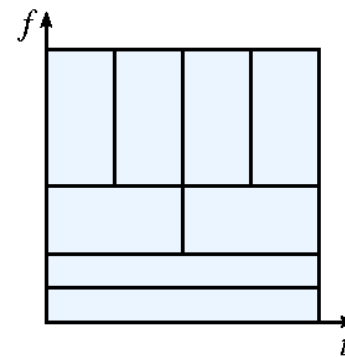
Reelles Zeitsignal der Länge  $N=16$



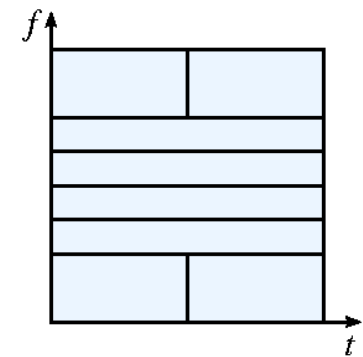
Fourier-Transformation



STFT



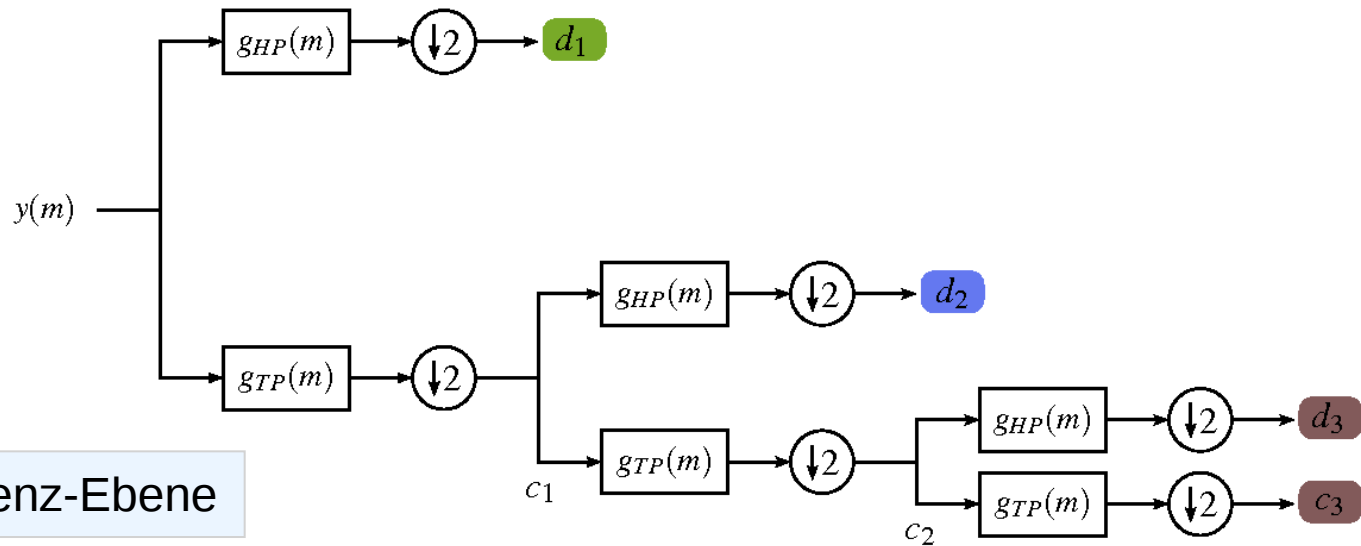
Wavelet-Transformation



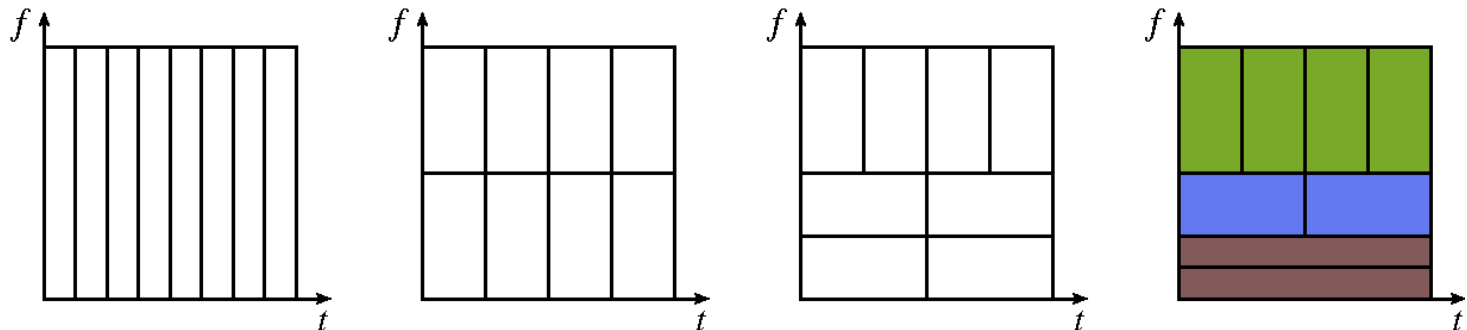
Wavelet Packets

# Diskrete Wavelet-Transformation

## Wavelet-Transformation

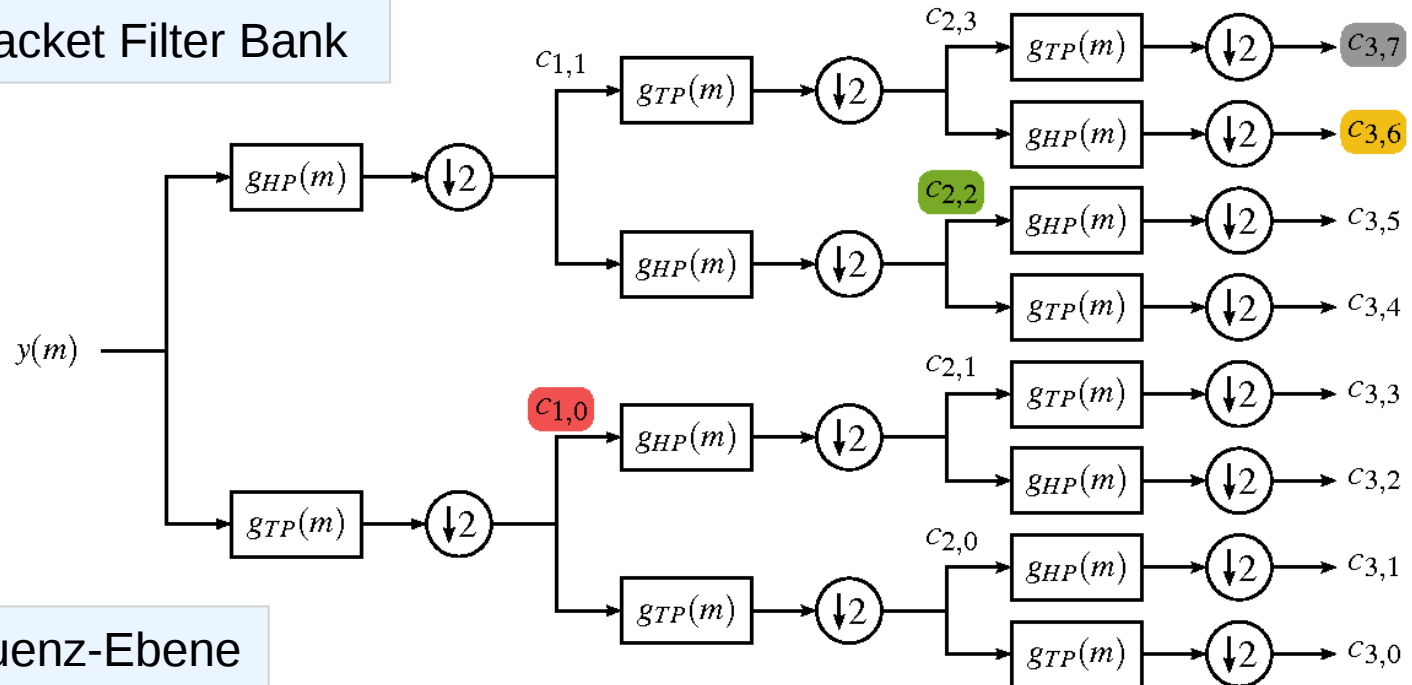


## Zeit-Frequenz-Ebene

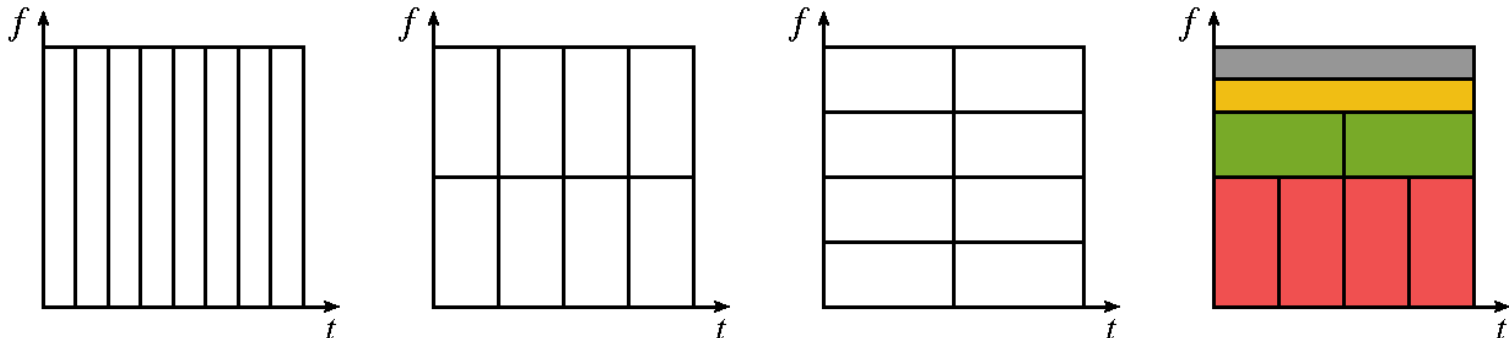


# Diskrete Wavelet-Transformation

## Wavelet Packet Filter Bank



## Zeit-Frequenz-Ebene



# Aufgaben

# Aufgabe 1: Eigenschaften der Wavelet Transformation

In Gl. (1) (Abschnitt 1.1) wird die Wavelet-Transformation als Zeit-Frequenz-Darstellung gegeben. Untersuchen Sie für diese Darstellung die Eigenschaften

- a) Translationsinvarianz und
- b) Affininvarianz.

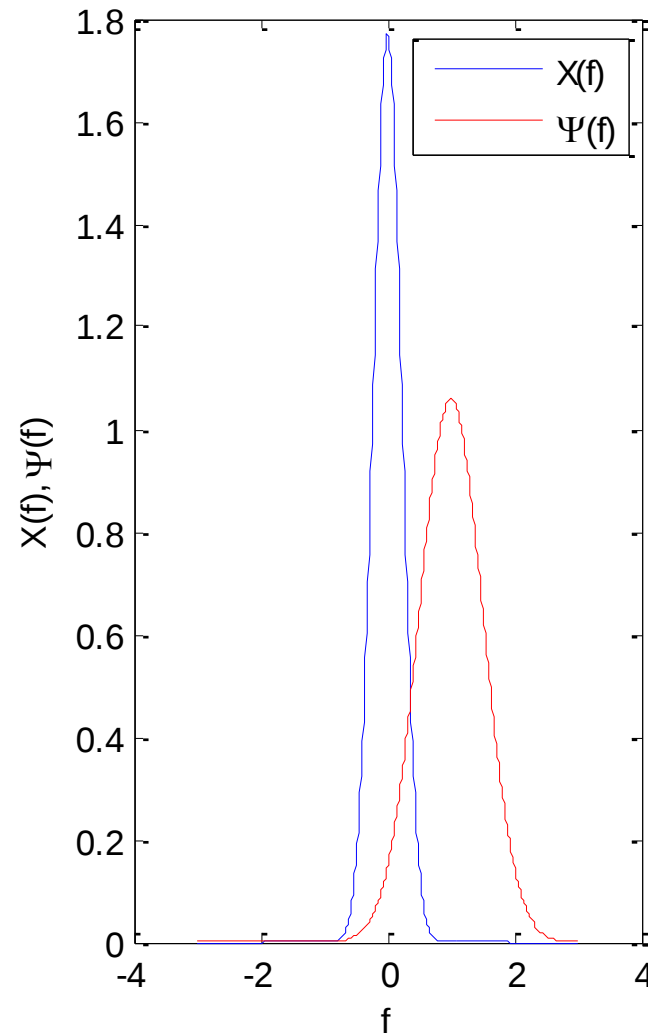
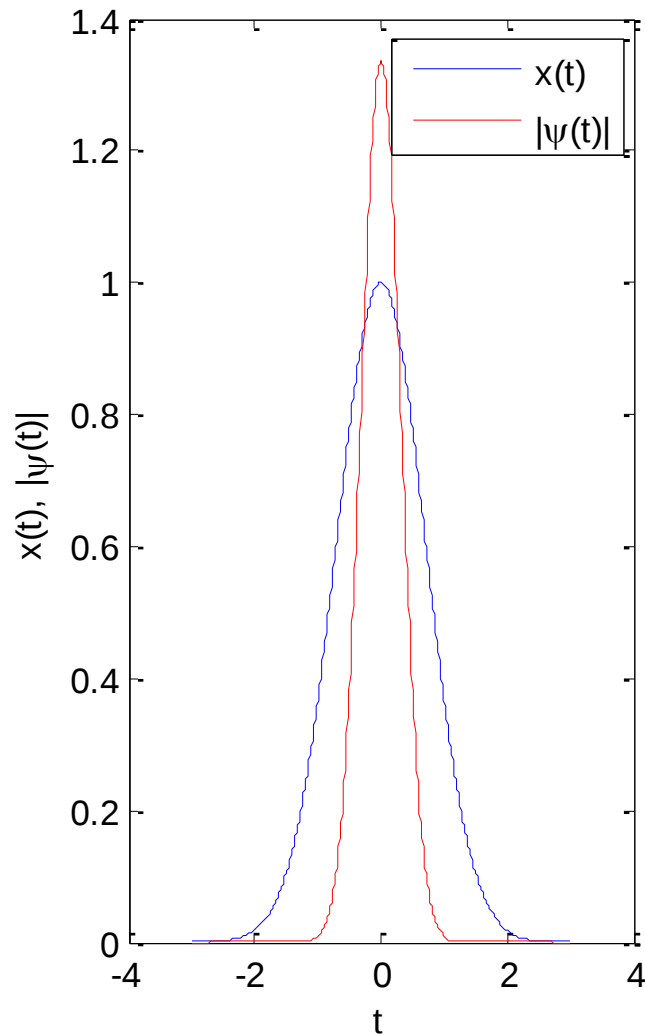
# Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

- a) Bestimmen Sie die Wavelet-Transformierte des Signals  $x(t) = \exp(-\alpha t^2)$  mithilfe des Gabor-Wavelets

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t^2\right) \exp(j2\pi f_0 t).$$

- b) Kann das Signal  $x(t)$  aus der Wavelet-Transformierten mithilfe des Gabor-Wavelets rekonstruiert werden?

# Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion



## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2) \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \beta \left( \frac{t-b}{a} \right)^2 \right) \\ &\quad \cdot \exp \left( -j2\pi f_0 \left( \frac{t-b}{a} \right) \right) dt \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2) \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-j2\pi f_0 \left(\frac{t-b}{a}\right)\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(j2\pi f_0 \frac{b}{a}\right) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha t^2 - \frac{\beta}{2a^2}t^2 + \frac{\beta b}{a^2}t - \frac{\beta b^2}{2a^2}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a}t\right) dt \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(j2\pi f_0 \frac{b}{a}\right)}_{=C} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha t^2 - \frac{\beta}{2a^2} t^2 + \frac{\beta b}{a^2} t - \frac{\beta b^2}{2a^2}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} t\right) dt \\ &= C \cdot \exp\left(-\frac{\beta b^2}{2a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\alpha + \frac{\beta}{2a^2}\right) t^2 + \frac{\beta b}{a^2} t\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} t\right) dt \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= C \cdot \exp\left(-\frac{\beta b^2}{2a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\underbrace{\left(\alpha + \frac{\beta}{2a^2}\right)}_{=\frac{2a^2\alpha + \beta}{2a^2}} t^2 + \frac{\beta b}{a^2} t\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} t\right) dt \\ &= C \cdot \exp\left(-\frac{\beta b^2}{2a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2a^2\alpha + \beta}{2a^2} \left(t^2 - \frac{2\beta b}{2a^2\alpha + \beta} t\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \left(\frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right)^2 - \left(\frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right)^2\right)\right) \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} t\right) dt \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= C \cdot \exp\left(-\frac{\beta b^2}{2a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2a^2\alpha + \beta}{2a^2} \left(t^2 - \frac{2\beta b}{2a^2\alpha + \beta}t\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \left(\frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right)^2 - \left(\frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right)^2\right)\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\frac{f_0}{a}t\right) dt \\ &= C \cdot \exp\left(-\frac{\beta b^2}{2a^2} + \frac{\beta^2 b^2}{2a^2(2a^2\alpha + \beta)}\right) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2a^2\alpha + \beta}{2a^2} \left(t - \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\frac{f_0}{a}t\right) dt \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= C \cdot \exp\left(-\frac{\beta b^2}{2a^2} + \frac{\beta^2 b^2}{2a^2(2a^2\alpha + \beta)}\right) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2a^2\alpha + \beta}{2a^2} \left(t - \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} t\right) dt \\ &= C \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} \cdot \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right) \\ &\quad \cdot \mathcal{F} \left\{ \exp\left(-\frac{2a^2\alpha + \beta}{2a^2} t^2\right) \right\} \Big|_{f=\frac{f_0}{a}} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= C \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} \cdot \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right) \\ &\quad \cdot \mathcal{F} \left\{ \exp\left(-\frac{2a^2\alpha + \beta}{2a^2} t^2\right) \right\} \Big|_{f=\frac{f_0}{a}} \\ &= C \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} \cdot \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right) \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2a^2\pi}{2a^2\alpha + \beta}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \frac{f_0^2}{a^2} \cdot 2a^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= \textcolor{red}{C} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} \cdot \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right) \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2a^2\pi}{2a^2\alpha + \beta}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \frac{f_0^2}{a^2} \cdot 2a^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(j2\pi f_0 \frac{b}{a}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{f_0}{a} \cdot \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta}\right) \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2a^2\pi}{2a^2\alpha + \beta}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \frac{f_0^2}{a^2} \cdot 2a^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left( j2\pi f_0 \frac{b}{a} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left( -\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta} \right) \exp \left( -j2\pi \frac{f_0}{a} \cdot \frac{\beta b}{2a^2\alpha + \beta} \right) \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2a^2\pi}{2a^2\alpha + \beta}} \exp \left( -\frac{\pi^2 \frac{f_0^2}{a^2} \cdot 2a^2}{2a^2\alpha + \beta} \right) \\ &= \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2\pi}{2a^2\alpha + \beta}} \cdot \exp \left( -\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta} \right) \cdot \exp \left( -\frac{2\pi^2 f_0^2}{2a^2\alpha + \beta} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left( j2\pi f_0 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{\beta}{2a^2\alpha + \beta} \right) \right) \end{aligned}$$

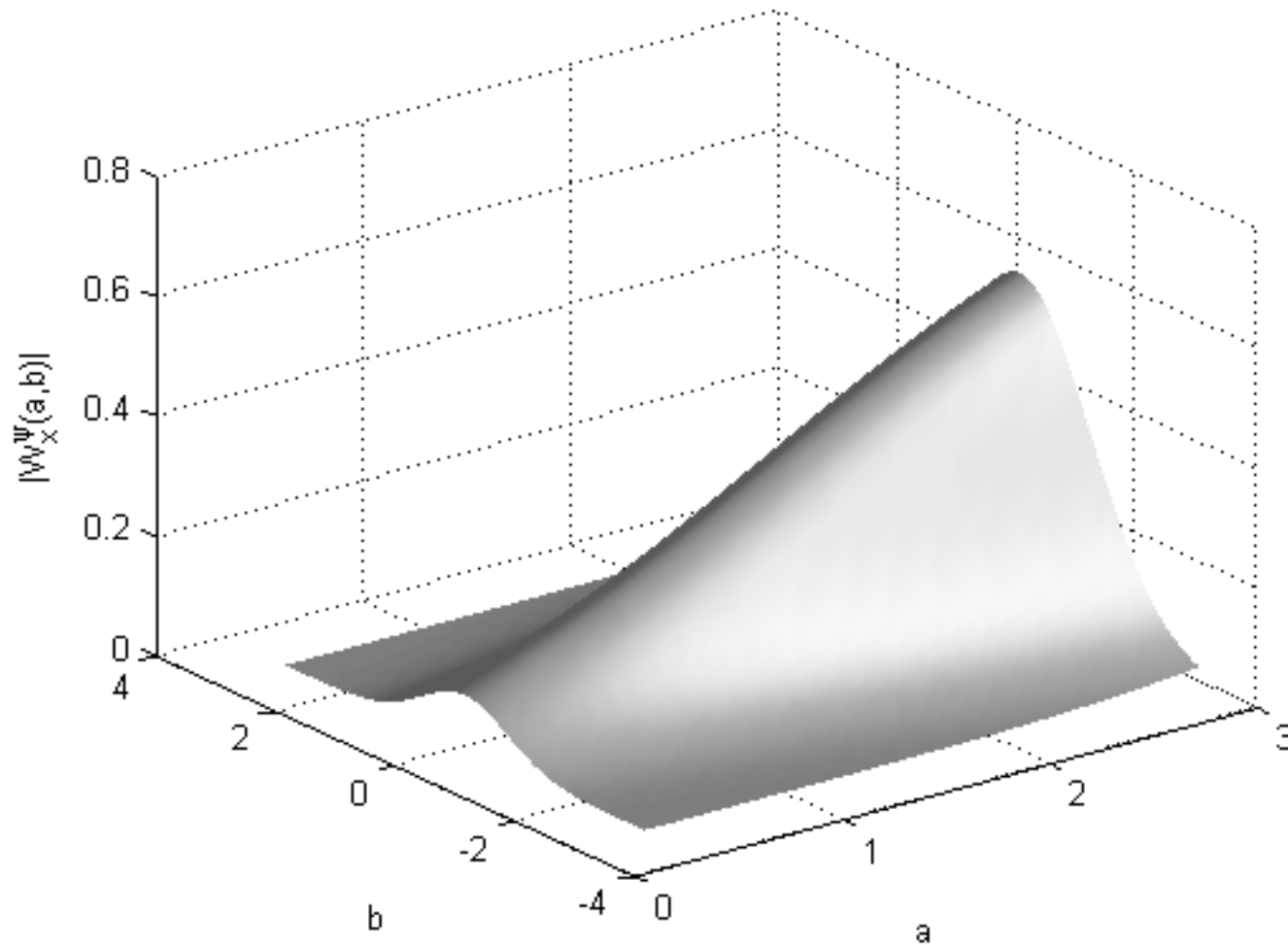
## Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)

$$\begin{aligned} W_x^\psi(a,b) &= \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2\pi}{2a^2\alpha + \beta}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\beta b^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi^2 f_0^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(j2\pi f_0 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{\beta}{2a^2\alpha + \beta}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi |a|}{2a^2\alpha + \beta}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\beta b^2 + 2\pi^2 f_0^2}{2a^2\alpha + \beta}\right) \cdot \exp\left(j2\pi f_0 \frac{2aba\alpha}{2a^2\alpha + \beta}\right) \end{aligned}$$

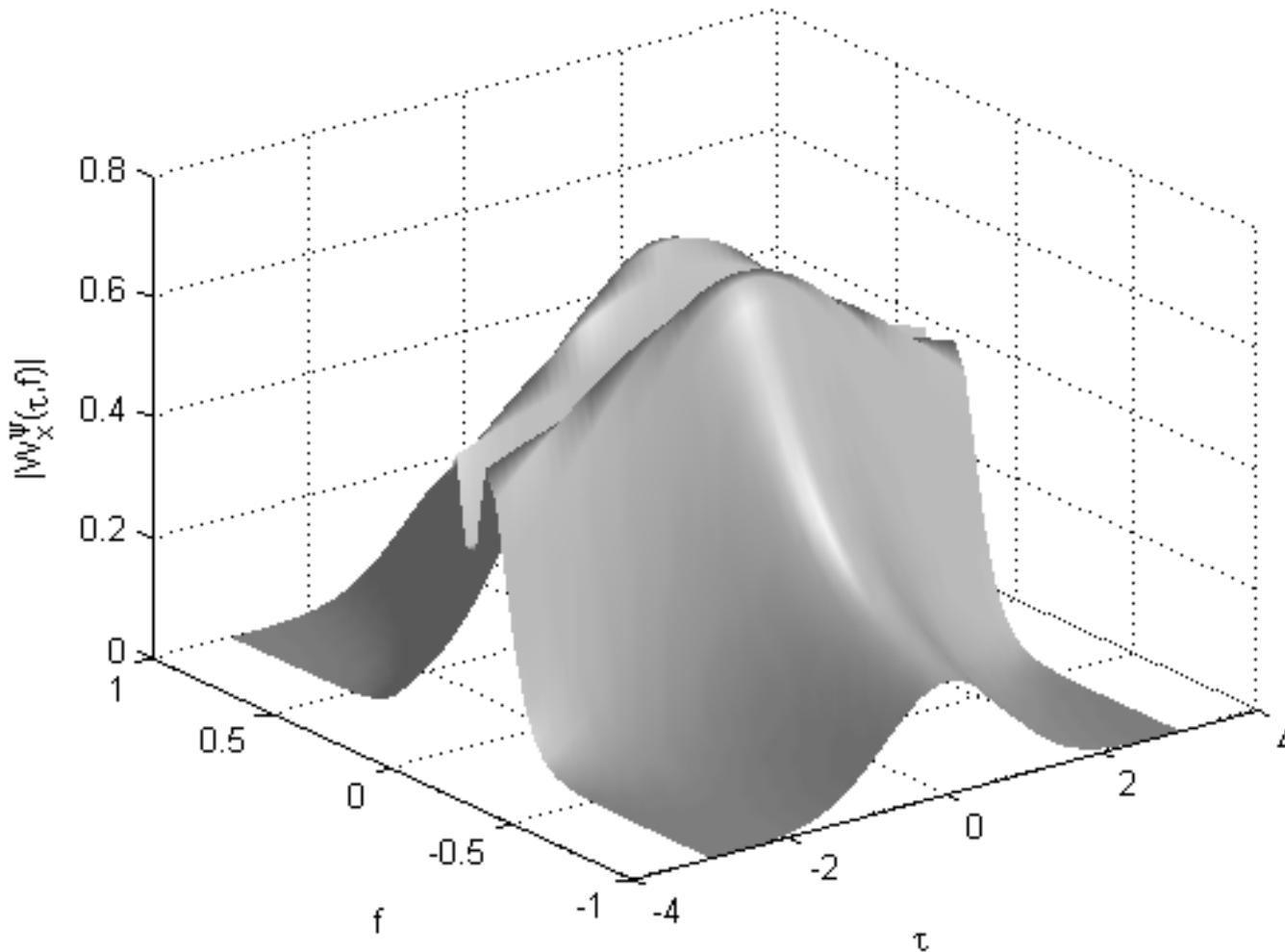
# Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)



# Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

■ a)



# Aufgabe 3: Multiraten-Filterbank

Das treppenförmige Signal

$$x_0 = \sum_{m=0}^7 c_0(m) (\sigma(t - mT) - \sigma(t - (m+1)T))$$

mit

$$c_0(0) = 0 \quad c_0(1) = 2 \quad c_0(2) = 3 \quad c_0(3) = 4 \quad c_0(4) = 4 \quad c_0(5) = 3 \quad c_0(6) = 2 \quad c_0(7) = 0$$

soll mithilfe einer Multiraten-Filterbank in seine Approximationen und Details zerlegt werden. Die Filterkoeffizienten sind vorgegeben:

$$\begin{aligned} g_{TP}(-1) &= +\frac{1}{\sqrt{2}} & g_{BP}(-1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_{TP}(0) &= +\frac{1}{\sqrt{2}} & g_{BP}(0) &= +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Die zugehörige Wavelet und Skalierungsfunktion sind definiert als

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{für } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zerlegen Sie das Signal  $x_0(t)$  mithilfe der Multiraten-Filterbank in die Approximationskoeffizienten  $c_k(m)$  und die Detailkoeffizienten  $d_k(m)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .
- Berechnen und zeichnen Sie die Projektionen des Signals  $x_0(t)$  auf die Funktionenräume  $V_k$  und  $W_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )

$$x_k(t) = \text{Proj}_{V_k}\{x_0(t)\}$$

$$y_k(t) = \text{Proj}_{W_k}\{x_0(t)\}$$

- Rekonstruieren Sie das Signal  $x_0(t)$  zeichnerisch durch Addition von  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  und  $x_3(t)$ .

# Aufgabe 3: Multiraten-Filterbank

- a) Zerlegen Sie das Signal  $x_0(t)$  mithilfe der Multiraten-Filterbank in die Approximationskoeffizienten  $c_k(m)$  und die Detailkoeffizienten  $d_k(m)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .
- b) Berechnen und zeichnen Sie die Projektionen des Signals  $x_0(t)$  auf die Funktionenräume  $V_k$  und  $W_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ):

$$x_k(t) = \text{Proj}_{V_k} \{x_0(t)\}$$

$$y_k(t) = \text{Proj}_{W_k} \{x_0(t)\}$$

- c) Rekonstruieren Sie das Signal  $x_0(t)$  zeichnerisch durch Addition von  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  und  $x_3(t)$ .

# Aufgabe 3: Multiraten-Filterbank

